# Devoir maison n$^{\text{o}}$ 5 - Correction

**Exercice 1.**
Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$.

**Q1.** Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

*Remarque : étant donné la question suivante, il semble plus pertinent d'écrire $F$ sous forme d'un* Vect.
Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $F$ si et seulement $3x - 2y + z = 0$ ce qui se réécrit $z = -3x + 2y$. Un vecteur de $F$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x+2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi $F = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ et en particulier $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

**Q2.** Déterminer une base et la dimension de $F$.

D'après la question précédente, $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ est une famille génératrice de $F$. Montrons que cette famille est libre. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cela donne un système dont les deux premières lignes sont $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ donc la famille est libre.

Ainsi $\boxed{(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \text{ est une base de } F}$ et en particulier $\boxed{\dim(F) = 2}$ (cardinal de la base).

**Q3.** Mêmes questions pour $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = x + y + z = 0\}$.

On procède comme aux questions précédentes avec cette fois un système.
Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $G$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} y = -2x \\ x - 2x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

Un élément de $G$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $G = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Ainsi $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ dont $\boxed{\text{une base est } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (car ce vecteur est non nul) et en particulier $\boxed{\dim(G) = 1}$.

**Q4.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

On va utiliser la caractérisation $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \iff \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \end{cases}$.

- D'abord, d'après les deux questions précédentes, $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

- Il reste donc à s'intéresser à $F \cap G$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$. Cela équivaut à

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 6x - y = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 6x - y = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 16x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z = 0$$

donc $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'autre inclusion étant triviale (intersection de sev), on obtient $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
*Bilan* : On déduit de ces deux points que $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G}$.

**Exercice 2.**
Soit $\varphi$ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = P + (1 - X)P'$.

**Q1.** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

On doit montrer que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et que $\varphi$ est linéaire.

- Montrons d'abord que $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= P + (1 - X)P' \\ &= a + bX + cX^2 + (1 - X)(b + 2cX) \\ &= a + b + 2cX - cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

- Montrons maintenant que $\varphi$ est linéaire. Soient $P$, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)\big(\lambda P' + \mu Q'\big) \\ &= \lambda\big[P + (1 - X)P'\big] + \mu\big[Q + (1 - X)Q'\big] \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \qquad \text{donc } \varphi \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

- Comme $\varphi$ est linéaire et va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.

**Q2.** Écrire la matrice $M$ de $\varphi$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

On calcule les images des éléments de la base canonique $\mathcal{B}$ et on les exprime dans cette base. On a

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 + (1-X)\times 0 = 1\\ \varphi(X) &= X + (1-X)\times 1 = 1\\ \varphi(X^2) &= X^2 + (1-X)\times 2X = -X^2 + 2X.\end{aligned}$$

Ainsi

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

*Remarque : on aurait aussi pu reprendre le calcul du début de la question 1 pour déterminer les images des éléments de $\mathcal{B}$ en prenant par exemple $a = b = 0$ et $c = 1$ pour calculer $\varphi(X^2)$.*

**Q3.** L'application $\varphi$ est-elle un isomorphisme ?

L'application $\varphi$ est un isomorphisme (ou automorphisme) si et seulement si sa matrice dans une base est inversible. Comme ici la matrice $M$ possède deux colonnes identiques, elle n'est pas inversible, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas un isomorphisme}}$.

**Q4.** Déterminer $\mathrm{Ker}(M)$ et en déduire le noyau de $\varphi$. On précisera en particulier la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) \iff M\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b=0\\ 2c=0\\ -c=0\end{cases} \iff \begin{cases} b=-a\\ c=0\end{cases}$$

Ainsi un élément de $\mathrm{Ker}(M)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a\\ -a\\ 0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\}}$.

Pour déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$ à partir de $\mathrm{Ker}(M)$, remarquons que le vecteur $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ représente, dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, le polynôme $a + bX + cX^2$. Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ représente le polynôme $1 - X$ d'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{1-X\}}$.

En particulier, comme $1 - X$ n'est pas le polynôme nul, on a $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1}$.

**Q5.** En déduire le rang de $\varphi$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Or d'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ et d'après le cours $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, d'où $\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 2}$.

**Exercice 3.**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

**Q1.** Calculer $M^2 - 4M + 3\mathrm{I}_2$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$. D'où après calcul de la somme $\boxed{M^2 - 4M + 3\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2}$.

**Q2.** En déduire que $M$ est inversible et exprimer $M^{-1}$ en fonction de $\mathrm{I}_2$ et $M$.

D'après la question précédente, on a $M^2 - 4M = -3\mathrm{I}_2$ d'où en divisant par $-3$ : $\frac{-1}{3}M^2 + \frac{4}{3}M = \mathrm{I}_2$, ce qui se réécrit $M \times \left(\frac{-1}{3}M + \frac{4}{3}\mathrm{I}_2\right) = \mathrm{I}_2$. Ainsi, $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \frac{-1}{3}M + \frac{4}{3}\mathrm{I}_2}$.

**Q3.** *Question de cours* : Rappeler le théorème de la division euclidienne d'un polynôme $A$ par un polynôme $B$.

Soient $A$ et $B$ deux polynômes avec $B$ non nul. Il existe un unique couple de polynômes $(Q, R)$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

**Q4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un polynôme $Q$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + a_nX + b_n.$$

En appliquant le théorème de la division euclidienne dans le cas $A = X^n$ et $B = X^2 - 4X + 3$, on obtient qu'il existe un unique couple de polynômes $(Q, R)$ tel que $\boxed{X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + R(X)}$ avec $\boxed{\deg(R) < 2}$. En particulier, $R$ est de la forme $\boxed{R(X) = a_nX + b_n}$ pour deux réels $a_n$ et $b_n$.

**Q5.** En évaluant la relation précédente en $X = 1$ et en $X = 3$, déterminer les expressions de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

Pour $X = 1$, on obtient $1 = 0 + a_n + b_n$ et pour $X = 3$, on a $3^n = 0 + 3a_n + b_n$. On résout alors le système formé par ces deux équations :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\iff} \begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n = 3^n - 1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a_n = \dfrac{3^n - 1}{2} \\ b_n = 1 - a_n = \dfrac{3 - 3^n}{2} \end{cases}}$$

**Q6.** En déduire l'expression de $M^n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X^n = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + \frac{3^n - 1}{2}X + \frac{3 - 3^n}{2} \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}[X].$$

En prenant cette égalité en $X = M$, grâce à la question **Q1**, il vient

$$M^n = 0_2 + \frac{3^n - 1}{2}M + \frac{3 - 3^n}{2}\mathrm{I}_2 \overset{\text{calculs}}{=} \boxed{\begin{pmatrix} 2 - 3^n & 2(3^n - 1) \\ 1 - 3^n & 2 \times 3^n - 1 \end{pmatrix}}.$$